Rozšíření MA1 - domácí úkol 8 – řešení

Trojný integrál:

Úvodem:

Základní poznatky o trojném (Riemannově) integrálu (snad srozumitelně vysvětlené) najdete opět v „písemných" přednáškách pro MA2:

V přednášce 29.4.2020 je probrán ten „nejjednodušší" trojný integrál $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, kde $\Omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$; nejprve je zde intuitivní „cesta" k tomuto integrálu, pak je definice „upřesněna" a uvedeny podmínky existence, vlastnosti a výpočet tohoto integrálu (opět „obecnější" Fubiniho věta). Pak následuje zobecnění - definice, vlastnosti - na $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, kde obor integrace $\Omega \subset R^3$ je t.zv. měřitelná (uzavřená) oblast. A výpočet užitím Fubiniho věty je pak ukázán pro speciální oblast $\Omega \subset R^3$ (a Fubiniho věta formulována pro tento typ Ω), kde

$$\Omega = \{ [x,y,z] \in R^3;\ [x,y] \in \omega \subset R^2,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y) \},$$

kde $\omega \subset R^2$ je uzavřená měřitelná oblast v R^2 a $\varphi, \psi \in C^{(1)}(\omega)$.
Po několika příkladech výpočtu i aplikací trojných integrálů přednáška končí úvodem do substituční metody v trojném integrálu – naznačením substituce do souřadnic válcových (cylindrických „odborně").

V přednášce ze 4.5.2020 (v její první části) je pak formulována věta o substituci v trojném integrálu obecně, připomenuta substituce do souřadnic válcových a ukázána substituce do souřadnic sférických (též užitečná substituce), obecně i na řešených příkladech.

I. Vypočítejte integrály (aspoň dva):

1. $\iiint\limits_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, kde $D=\{[x,y,z];\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 2, 0\le z\le 3\}$;

„Návod" pro výpočet:

Užijeme Fubiniho větu (opět, jako u integrálu dvojného, zobecněnou pro integrál trojný):

je-li oblast $D = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$, a $f \in R(\Omega)$

(f spojitá na Ω, nebo f spojitá až na konečně mnoho bodů a konečně mnoho jednoduchých oblouků a omezená na Ω), pak

$$I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z)\,dz ,$$

a můžeme libovolně zaměnit pořadí integrace, tj. také např.

$$I = \int_c^d dy \int_e^f dz \int_a^b f(x,y,z)\,dx = \int_e^f dz \int_a^b dx \int_c^d f(x,y,z)\,dy \quad \text{atd.}$$

A řešení daného příkladu:

$$\iiint\limits_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz , \quad D = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle :$$

(i) daný integrál existuje, neboť f je spojitá na D, D je uzavřená (a omezená) oblast v R^3 ;

(ii) výpočet integrálu – Fubiniho věta (zvolíme jednu možnost „pořadí")

$$\iiint\limits_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x+y+z)\,dz = \int_0^1 dx \int_0^2 \left[xz + yz + \frac{z^2}{2}\right]_0^3 dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 \left(3x+3y+\frac{9}{2}\right) dy = \int_0^1 \left[3xy + \frac{3y^2}{2} + \frac{9}{2}y\right]_0^2 dx = \int_0^1 (6x+15)\,dx = \left[\frac{6x^2}{2} + 15x\right]_0^1 = \underline{18}$$

2. $\iiint\limits_D x\,dx\,dy\,dz$, kde omezená oblast D je ohraničená rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$ a $x+y+z=1$;

(i) daný integrál existuje, neboť integrační obor je omezená oblast (dle zadání), jejíž hranice je sjednocení konečně mnoha hladkých ploch , a funkce $f(x,y,z)=x$ je funkce spojitá na $\bar{D}$;

(ii) výpočet integrálu :
ukažme si, že oblast D si můžeme „představit" jako oblast Ω typu, uvedeného v úvodu :

(*) $\Omega = \{ [x,y,z] \in R^3 ;\ (x,y) \in \omega \subset R^2,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y) \}$,

pak $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz \underset{F.V.}{=} \iint\limits_\omega \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$

(dle Fubiniho věty), a integrovat přes $\omega \subset R^2$ už „umíme" ($\omega \subset R^2$ měřitelná , $\varphi, \psi \in C^1(\bar{\omega})$) ; a je-li navíc

(**) $\omega = \{ (x,y) \in R^2 ;\ a \le x \le b\ ;\ u(x) \le y \le v(x) \}$, kde $u, v \in C^1(\langle a,b \rangle)$,

pak umíme Fubiniho věty „načase" :

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{u(x)}^{v(x)} dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \ .$$

A problém v konkrétním" zadání integrační oblasti D ? Je to „odhalení" "popisu" oblasti D , analogické (*) a (**), a odtud pak „ získáme meze pro aplikaci Fubiniho věty.

A v našem zadání :

1) dle (*) hledejme meze pro „z" : víme, že D je ohraničená rovinou $z=0$ (jedna mez) a rovinou $x+y+z=1$, a odtud druhá mez pro „z", $z = 1-x-y$;

a protože D je oblast omezená, proměnná „z" bude mezi těmito dvěma řešeními, tedy $\underline{0 \le z \le 1-x-y}$

(zde tedy $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x,y) = 1-x-y$);

2) $\underline{\text{oblast } \omega \subset \mathbb{R}^2}$ (v (x,y)):

z podmínky 1): $0 \le z \le 1-x-y$ plyne, že $0 \leqq 1-x-y$, tj. $y \leqq 1-x$,

a zároveň je D ohraničeno rovinou $y=0$, tedy

„dohromady": $\underline{0 \le y \le 1-x}$ $\{$tj. $u(x)=0$, $v(x)=1-x)$

a odtud plyne, že $x \le 1$, a zároveň ze zadání (D ohraničená rovinou $x=0$) dostaneme, že $0 \le x \le 1$;

tedy, $D = \{[x,y,z];\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y\}$,

a pak (užijeme Fubiniho větu)

$$\iiint_D x\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x\,(1-x-y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left((x-x^2) - xy\right) dy = \int_0^1 \left[(x-x^2)y - x\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx =$$

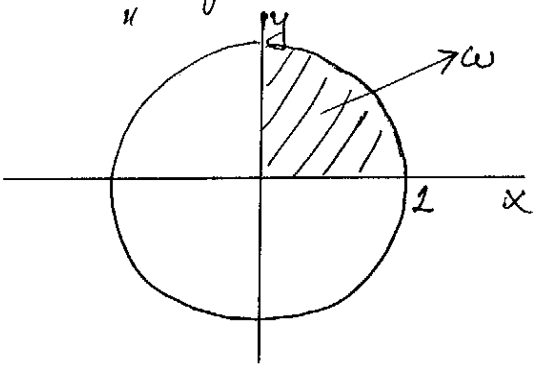
$$= \int_0^1 \left(x(1-x)(1-x) - x \cdot \frac{(1-x)^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3-8+6}{12}\right) = \underline{\frac{1}{24}}$$

3. $\iiint_D y\,dx\,dy\,dz$, kde $D=\left\{[x,y,z];\ 0\le x,\ 0\le y,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\right\}$;

(i) opět integrál existuje, neboť D je omezená oblast, ohraničená rovinami a grafem spojité funkce $\varphi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, a $f(x,y,z)=y$ je funkce spojitá v D;

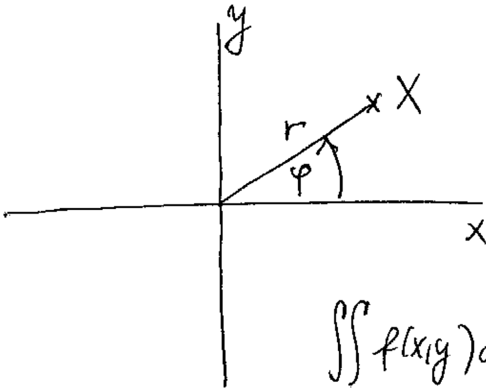
(ii) oblast integrace D je opět oblast „našeho" typu: je přímo zadáno $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2$, tedy $\varphi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, a $\psi(x,y)=2$; zbývá „najít" $\omega\subset R^2$, tj. integrační oblast „pro" x,y; z podmínky „pro z", dostaneme, že $\sqrt{x^2+y^2}\le 2$, tedy ω je část kruhu o středu v počátku a poloměru $R=2$, a podmínky $x\ge 0$, $y\ge 0$ „zadají" čtvrtinu toho kruhu:



tedy bychom v kartézské soustavě souřadnic psali: $0\le x\le 2$, $0\le y\le\sqrt{4-x^2}$, a $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2$.

Ale zde, pro integraci přes oblast ω, která je částí kruhu, je vhodnější (i výhodnější) provést substituci do souřadnic polárních – připomeňme si ji:

Polární souřadnice r,φ bodu $X\neq(0,0)$ v rovině:



$x=r\cos\varphi$, $0<r<\infty$
$y=r\sin\varphi$, $0\le\varphi<2\pi$)

a Jacobián $J(r,\varphi)=r$, pak

$$\iint_{\omega_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\omega_{r,\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

Tedy zde dostaneme (nejprve obecně)

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\omega_{xy}} dx\,dy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz = \iint_{\omega_{r\varphi}} r\,dr\,d\varphi \int_{g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{h(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,dz \,,$$

což lze přímo hned v „trojném" integrálu zapsat:

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_{r,\varphi,z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz \,,$$

zde (r,φ,z) jsou t.zv. válcové souřadnice (též cylindrické), a $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $r>0$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, a pak Jacobián tohoto zobrazení je

$$J(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}, & \frac{\partial x}{\partial \varphi}, & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi}, & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r}, & \frac{\partial z}{\partial \varphi}, & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi, & 0 \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi, & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \,,$$

a „obecný" vzorec pro substituci do souřadnic válcových je

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_{r\varphi z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,|J(r,\varphi,z)|\,dr\,d\varphi\,dz$$

(což nahoře „vyšlo" při užití Fubiniho věty pro „naši" speciální oblast D)

<u>A zpět k našemu příkladu:</u>

<u>D_{xyz}</u>: kde $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$, $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$,

<u>$D_{r,\varphi,z}$</u>: $r \le z \le 2$ $\quad (\sqrt{x^2+y^2} = r)$, $0 < r \le 2$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Tedy, (substituce do souřadnic válcových)

$$\iiint\limits_{D_{xyz}} y \, dx dy dz = \iiint\limits_{D_{r,\varphi,z}} \underbrace{r.\sin\varphi}_{(=y)} . \underbrace{r}_{\text{Jacobián}} \, dr d\varphi dz = \text{(užijeme Fubiniho věty)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^2 (r^2 \sin\varphi) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^2 r^2 . \left[z \right]_r^2 dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^2 r^2 (2-r) dr = \left[-\cos\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{2r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 1 . 2^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

nebo, jak jsme uvažovali o integraci na začátku úvah o tomto příkladu:

$$\iiint\limits_{D_{xyz}} y \, dx dy dz = \iint\limits_{\omega_{xy}} y \, dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 dz = \iint\limits_{\omega_{xy}} y \left[z \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 dx dy =$$

$$= \iint\limits_{\omega_{xy}} y \left(2 - \sqrt{x^2+y^2} \right) dx dy = \text{(a nyní provedeme substituci do souřadnic polárních v rovině } x,y)$$

$$= \iint\limits_{\omega_{r\varphi}} r \sin\varphi \, (2-r) \cdot \underbrace{r}_{\text{(Jacobián)}} \, dr d\varphi \underset{\text{F.V.}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^2 r^2 (2-r) dr = \dots$$

(integrál dále stejný jako „nahoře").

4. $\iiint\limits_D z^2\,dx\,dy\,dz$, kde omezená oblast D je ohraničená

a) rovinou $z=0$ a plochou $z=1-x^2-y^2$;

b) plochou $z=x^2+y^2$ a rovinou $z=4$.

(užijte válcové souřadnice)

Nyní už můžeme počítat tyto příklady „rychleji", použijeme „výklad" o substituci v trojném integrálu do souřadnic válcových z minulého příkladu: (integrály v a) i v b) existují)

a) D_{xyz} : $0 \le z \le 1-x^2-y^2$, a odtud dostáváme pro $\omega_{xy} \subset R^2$

$x^2+y^2 \leqq 1$ (z podmínky $0 \leqq 1-x^2-y^2$) ,

tedy ω_{xy} je kruh o středu v počátku a poloměru $R=1$,

tedy odtud snadno

$D_{r\varphi z}$: $0 \le z \le 1-r^2$ ($x^2+y^2=r^2$ v polárních souřadnicích)

$0 < r \le 1$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\iiint\limits_{D_{xyz}} z^2\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D_{r\varphi z}} z^2 \cdot r\,dr\,d\varphi\,dz = \text{(dle Fubiniho věty)}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \int_0^{1-r^2} z^2\,dz = 2\pi \int_0^1 r \cdot \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{1-r^2} dr = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 r(1-r^2)^3\,dr = \frac{\pi}{12}$$

(už umíme = nopř. 1V $\left|\begin{array}{l} 1-r^2=t \\ -2r\,dr=dt \\ r=0 \to t=1 \\ r=1 \to t=0 \end{array}\right| = -\frac{\pi}{3}\int_1^0 t^3\,dt = \frac{\pi}{3}\int_0^1 t^3\,dt =$

$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}$)

Ukažme si ještě výpočet užitím (dle Fubiniho věty) jiného pořadí integrace:

Dxyz lze popsat " i takto:

"Je-li D omezeno plochami $z=0$ a $z=1-x^2-y^2$, pak $0 \le z \le 1-x^2-y^2$, odtud (jako dříve) $x^2+y^2 \le 1$, a tedy pak, chceme-li integrovat podle „z" až na „závěr", dostaneme, že $0 \le z \le 1$; pro pevné „z" ($z \in \langle 0,1 \rangle$) je integrační obor závislý na „z", neboť z nerovnice $z \le 1-x^2-y^2$ dostaneme pro „z" pevné, že $x^2+y^2 \le 1-z$, tj. pro „z" pevné je integrační obor $\omega_{xy}(z)$ kruh o poloměru $R(z)=\sqrt{1-z}$. Tedy, užijeme-li Fubiniho větu takto, máme:

$$\iiint\limits_{D_{xyz}} z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 z^2\,dz \underbrace{\iint\limits_{\omega_{xy}(z)} dx\,dy}_{\substack{\text{plocha kruhu}\\ \text{o poloměru } R(z)=\sqrt{1-z}}} = \int_0^1 z^2 \cdot \pi(1-z)\,dz =$$

(snadnější řešení")

$$= \pi \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{12} \quad \text{(„podruhé")}$$

(Samozřejmě můžeme $\iint\limits_{\omega_{xy}(z)} dx\,dy$ spočítat (spíše vyjádřit) pomocí souřadnic polárních: pak

$$\iiint\limits_{D_{xyz}} z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 z^2\,dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{1-z}} \cdot\, r\,dr = 2\pi \int_0^1 z^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-z}} dz =$$

$$= \pi \int_0^1 z^2(1-z)\,dz$$ (což už jsme měli „nahoře"))

b) $D_{xyz}: \; x^2+y^2 \le z \le 4$, a odtud dostaneme pro $\omega_{xy} \subset R^2$
$x^2+y^2 \le 4$ (tj. ω_{xy} je kruh o poloměru $R=2$ a středu v počátku) ;

tedy, provedeme u $\iiint\limits_{D_{xyz}} z^2\,dx\,dy\,dz$ transformaci do souřadnic válcových

(nebo, chcete-li, můžete udělat opět ve dvou krocích – nejprve Fubiniho, pak substituci do souřadnic polárních) : $r^2 \le z \le 4$, a tedy

$$\iiint\limits_{D_{xyz}} z^2\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D_{r,\varphi,z}} z^2 \cdot r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\,dr \int_{r^2}^4 z^2\,dz =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r \cdot \left[\frac{z^3}{3}\right]_{r^2}^4 dr = \frac{2\pi}{3} \int_0^2 r\,(64-r^6)\,dr = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{64r^2}{2} - \frac{r^8}{8}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot 2^5 \cdot 3 = \underline{64\pi}$$

nebo, podobně jako v příkladu a), lze integrál v jiném pořadí opět integrace dle „z" až jako poslední, pak dostaneme nejprve $0 \le z \le 4$, a pro pevné „z" je $\omega_{xy}(z)$ dána podmínkou $x^2+y^2 \le z$, tj. $\omega_{xy}(z)$ je kruh o poloměru $R(z) = \sqrt{z}$, tedy, užitím Fubiniho věty máme :

$$\iiint\limits_{D} z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^4 z^2 \iint\limits_{\omega_{xy}(z)} dx\,dy = \int_0^4 z^2 \cdot \pi z\,dz = \pi\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^4 = 64\pi$$

(asi hodně „jednodušší" výpočet, často se takto integruje třeba ve fyzice)

II. Aplikace trojného integrálu (vyberte si aspoň dva příklady):

Trojným integrálem vypočítejte objem tělesa, ohraničeného

1. rovinami $x=0, y=0$, $x=4$, $y=4$, $z=0$ a plochou $z=x^2+y^2+1$;
2. rovinami $z=0$, $z=5$, $y=4$ a plochou $y=x^2$;
3. rovinami $z=0$, $x+y+z=2$ a plochou $y=x^2$;
4. rovinami $z=0$, $y=0$, $x+y+z=2$ a plochou $y=x^2$;
5. rovinami $x=0$, $y=1$, $x+y=3$, $z=0$ a plochou $z=xy$;
6. plochou $z=x^2+y^2$ a rovinou $z=4$ (užijte válcové souřadnice).

Návod: Je-li $\Omega \subset R^3$ měřitelná oblast, pak objem této oblasti Ω je (chápeme-li Ω jako těleso, pak objem tělesa)

- $V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz$ (zde „$dxdydz = dV$" – element objemu);

speciálně, je-li $\Omega = \{(x,y,z);\ (x,y)\in\omega\subset R^2,\ 0\le z\le f(x,y)\}$, pak užitím Fubiniho věty dostaneme vzorec pro výpočet $V(\Omega)$, uvedený jako aplikace integrálu dvojného:

$$\underline{V(\Omega)} = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iint\limits_{\omega}\left(\int_0^{f(x,y)} dz\right)dxdy = \underline{\iint\limits_{\omega} f(x,y)\,dxdy},$$

nebo, obecněji, pokud je $\Omega = \{(x,y,z),\ (x,y)\in\omega,\ f(x,y)\le z\le g(x,y)\}$, kde $f,g\in C^{(1)}(\omega)$, $\omega\subset R^2$ měřitelná, je

$$\underline{V(\Omega)} = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iint\limits_{\omega}\left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz\right)dxdy = \underline{\iint\limits_{\omega}\left(g(x,y)-f(x,y)\right)dxdy}$$

A dále řešení zadaných příkladů:
(zadané těleso budeme značit Ω, $\Omega\subset R^3$)

1. Ω je ohraničená rovinami $x=0, y=0, x=4, y=4, z=0$ a plochou $z = x^2+y^2+1$.

Tedy, dle předchozího obecného návodu je (Ω je měřitelná)

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz, \quad \text{kde} \quad 0 \le z \le x^2+y^2+1 ,$$

tedy (dle Fubiniho věty) dostáváme

$$V(\Omega) = \iint_{\omega} \left(\int_0^{x^2+y^2+1} dz \right) dx\,dy = \iint_{\omega} \Big[z \Big]_0^{x^2+y^2+1} dx\,dy = \iint_{\omega} (x^2+y^2+1)\, dx\,dy \quad (*)$$

(což je vzorec pro výpočet objemu tělesa „z dvojného integrálu")

Zbývá určit oblast $\omega \subset \mathbb{R}^2$ (v rovině $z=0$) : zde snadno ze zadání dostaneme $\omega = \langle 0,4\rangle \times \langle 0,4\rangle$ (neboť těleso je ohraničeno rovinami $x=0$ a $x=4$, $y=0$ a $y=4$, tj. $0 \le x \le 4$ i $0 \le y \le 4$).

A tedy pokračováním užití Fubiniho věty dostáváme :

$$\iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz \underset{(*)}{=} \iint_{\omega} (x^2+y^2+1)\, dx\,dy = \int_0^4 dx \int_0^4 (x^2+y^2+1)\, dy =$$

$$= \int_0^4 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_0^4 = \int_0^4 \left(4(x^2+1) + \frac{64}{3} \right) dx =$$

$$= 4 \left[\frac{x^3}{3} + x + \frac{16}{3} x \right]_0^4 = 4 \left[\frac{64}{3} + 4 + \frac{64}{3} \right] = \frac{560}{3} \quad (\text{snad?})$$

2. Ω je těleso, ohraničené rovinami $z=0, z=5, y=4$ a plochou $y=x^2$.

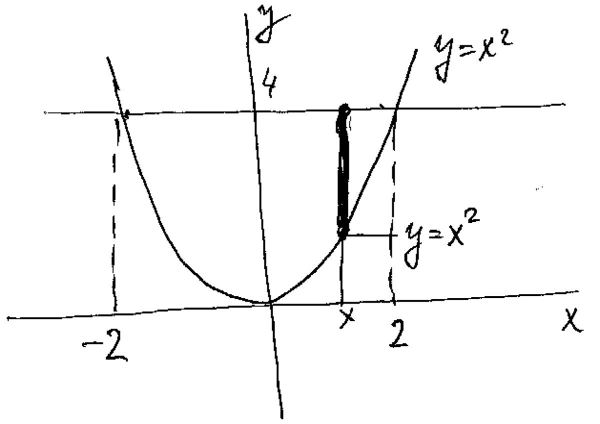
A opět, Ω je měřitelná oblast (těleso je omezené, a ohraničené „hezkými" plochami).

Možné vysvětlení – co je plocha o rovnici $y=x^2$ – takové ploše se říká „válcová" plocha, a můžete si tuto plochu představit tak, že parabolou $y=x^2$ (v rovině $z=0$ třeba) pak „jedete" ve směru osy „z" „nahoru" i „dolů" – „vrstevnice" této plochy v libovolné „výšce" z je stále parabola $y=x^2$, tj. množina bodů $\{(x,y,z);\ y=x^2\}$.

A nyní výpočet objemu tělesa Ω:

$$V(\Omega)=\iiint_\Omega dx\,dy\,dz \quad , \text{ v } \Omega \text{ je } 0\le z\le 5, \text{ tj. (Fubini)}$$

$$V(\Omega)=\iint_\omega 5\,dx\,dy$$, a nyní potřebujeme určit obor integrace $\omega\subset R^2$:



meze pro „y" dostaneme (ze zadání) –
– Ω je ohraničena rovinou $y=4$ a plochou $y=x^2$, tj. pro pevné x je
$x^2\le y\le 4$, a odtud pak
$-2\le x\le 2 \quad (x^2\le 4)$

Tedy (užitím Fubiniho věty) (v R^3 od „začátku")

$$V(\Omega)=\iiint_\Omega dx\,dy\,dz=\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}dy\int_0^5 dz=5\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}dy=5\int_{-2}^{2}\left[y\right]_{x^2}^{4}dx=$$

$$=5\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=10\int_0^2(4-x^2)\,dx=10\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\dots=\frac{10.16}{3}=\frac{160}{3}$$

3. <u>Těleso Ω je ohraničené rovinami $z=0$, $x+y+z=2$ a plochou $y=x^2$.</u>

Opět můžeme začít řešení „vzorcem“ $V(\Omega)=\iiint_\Omega dx\,dy\,dz$ a potřebujeme pak najít meze pro integraci dle jednotlivých proměnných při užití Fubiniho věty:

(i) $\underline{0 \leqq z \leqq 2-x-y}$ – tyto meze dostáváme z podmínek, že Ω je ohraničená rovinami $z=0$ a $x+y+z=2$, tj. $z=2-x-y$;

pak (užitím Fubiniovy věty)

$$V(\Omega)=\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_\omega dx\,dy \int_0^{2-x-y} dz \quad ; \quad (*)$$

(ii) nyní potřebujeme najít integrační obor v rovině $z=0$, označený $\omega(\subset R^2)$ v integrálu $(*)$, pro další užití Fubiniho věty „popsat“ meze pro y (v závislosti na proměnné x pravděpodobně) a pak znovu – meze pro integraci dle x (nebo obráceně při záměně pořadí integrace): meze pro „y“:
z podmínky $0 \leq z \leq 2-x-y$ dostaneme $y \leqq 2-x$,
z ohraničení Ω plochou $y=x^2$ máme i ohraničení ω parabolou $y=x^2$ (opět jako v minulém překladu je plocha $y=x^2$ válcová plocha), tj. $\underline{x^2 \leq y \leq 2-x}$ a pak

(iii) meze pro integraci dle x:
z podmínky pro „y“ $x^2 \leq y \leq 2-x$ odvodíme podmínku pro x: $x^2 \leq 2-x$,
a řešením kvadratické nerovnice $x^2+x-2 \leqq 0$ „máme“ konečně meze i pro x: $\underline{-2 \leq x \leq 1}$ $\quad ((x+2)\cdot(x-1) \leqq 0)$.

<u>A můžeme tedy integrovat!</u> (užitím Fubiniho věty)

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\omega} dx\,dy \int_0^{2-x-y} dz = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} dz =$$

$$= \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} (2-x-y)\,dy = \int_{-2}^{1} \left[(2-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2-x} =$$

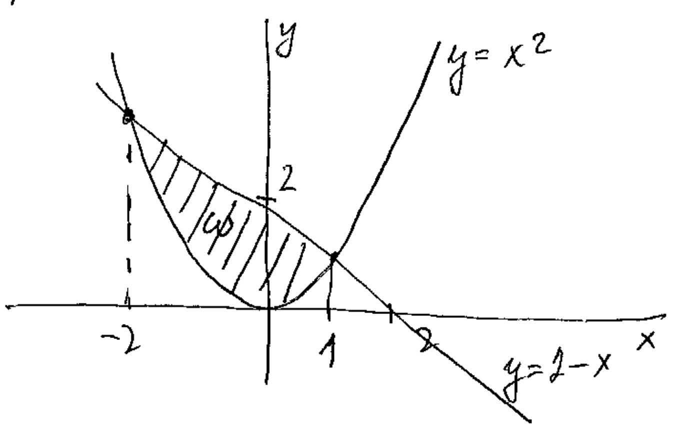
$$= \int_{-2}^{1} \left[\frac{(2-x)^2}{2} - \left((2-x)x^2 - \frac{x^4}{2}\right)\right] dx = \int_{-2}^{1} \left(\frac{(x-2)^2}{2} + x^3 - 2x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{(x-2)^3}{6} + \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_{-2}^{1} = \dots\dots \qquad (*)$$

Návrh „dohody" (analogické u zkoušek z MA2) – takovéto výrazy (*) „nebudeme (nemusíme) dopočítávat „do konce", myslím, že by stačilo v příkladech řešit dvojný integrál až k vyjádření „posledního" integrálu z funkce jedné proměnné, nebo i určit zde primitivní funkci, ale dosazovat meze už nemusíme, v klidu zvládneme.

A poznámka navíc:

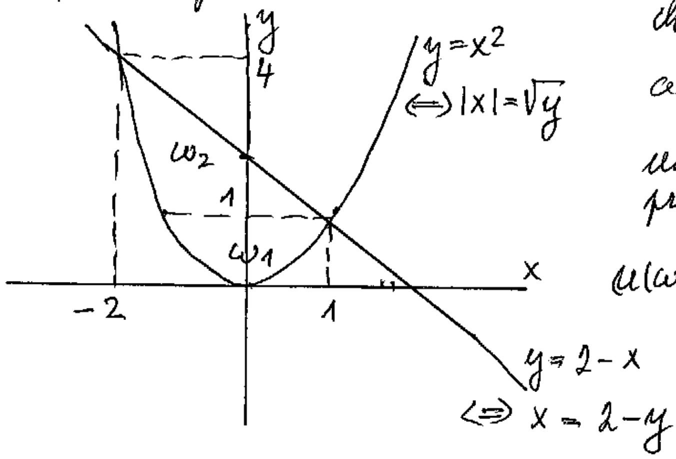
Při řešení příkladu jsem chtěla ukázat, že meze pro integraci lze najít i bez „obrázku", ale asi je jednodušší najít ze zadání „našeho typu" oblasti Ω meze pro „z", a pak si v rovině $z=0$ „pomoci pro „odhalení" oblasti ω obrázkem:



zde jsou meze „vidět" pro „y", a je i „vidět", jak najít meze pro konečnou integraci dle „x".

Navíc, dvojný integrál přes oblast ω je již řešen v domácím úkolu 7.

A závěrem – postup s obráceným pořadím integrace dvojného integrálu „přes" oblast ω – snad vhodné jako cvičení, ale dost „složitější":



chceme-li nejdříve integrovat přes „x" a pak „přes" proměnnou „y", musíme užít aditivitu integrálu: zkusme pro míru ω:

$$\mu(\omega)=\iint_{\omega} dx\,dy = \iint_{\omega_1} dx\,dy + \iint_{\omega_2} dx\,dy\,,$$

neboť pro $y \in \langle 0,1\rangle$ proměnná x je v mezích $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$,

a pak pro $y \in \langle 1,4\rangle$ je $-\sqrt{y} \le x \le 2-y$,

tedy,
$$\iint_{\omega} dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} dx =$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{y}\,dy + \int_1^4 (2-y+\sqrt{y})\,dy\ ;$$

A v „našem" integrálu pro výpočet $V(\Omega)$:

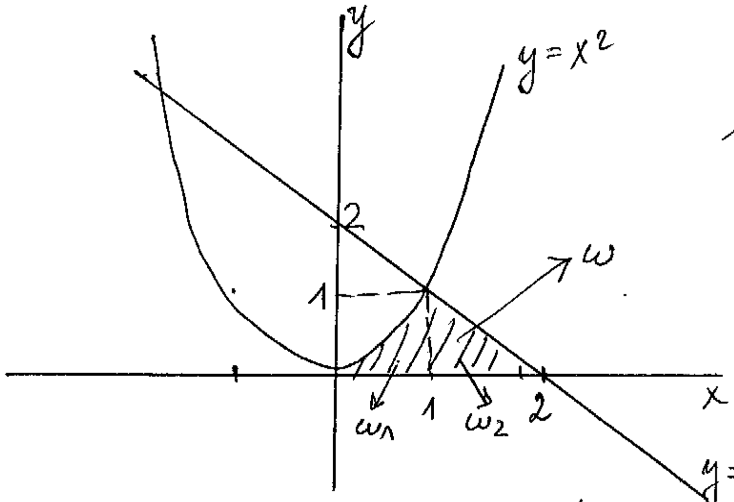
$$\iint_{\omega} (2-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (2-x-y)\,dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} (2-x-y)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[(2-y)x - \frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy + \int_1^4 \left[(2-y)x - \frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{y}}^{2-y} dy = \ldots$$

Je zde vidět, že i výpočet „posledních" integrálů fcí jedné proměnné y bude „horší".

4. Těleso Ω je ohraničené rovinami $z=0$, $x+y+z=2$, $y=0$ a plochou (válcovou) $y=x^2$.

Tento příklad tělesa má ohraničení stejné, jako v příkladě 3, rovinami $z=0$, $x+y+z=2$ a plochou $y=x^2$, ale „navíc" je tu rovina $y=0$. Těleso Ω opět „stojí" na rovině $z=0$, tedy pak pro „z" dostaneme meze $0 \le z \le 2-x-y$ pro integrál trojný $\iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = V(\Omega)$, nebo můžeme užít „hned" i integrál dvojný, tj: $V(\Omega) = \iint\limits_{\omega} (2-x-y)\,dx\,dy$ (což stejně, jako v příkladu 3, vyžaduje i první užití Fubiniho věty. Ale ω v tomto příkladu bude „jiná" – zkusme začít náčrtkem



A „zadání" mezí pro oblast ω: bude „výhodnější" asi takto:

$$\omega = \{[x,y];\ 0 \le y \le 1,\ \sqrt{y} \le x \le 2-y\}$$

a integrovat – vnější integrace dle y, vnitřní dle x:

$$V(\Omega) = \iint\limits_{\omega} (2-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} (2-x-y)\,dx = \int_0^1 \left[(2-y)x - \frac{x^2}{2}\right]_{\sqrt{y}}^{2-y} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{(y-2)^2}{2} - \left((2-y)\sqrt{y} - \frac{y}{2}\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{(y-2)^2}{2} + \frac{y}{2} + y\sqrt{y} - 2\sqrt{y}\right) dy =$$

$$= \left[\frac{(y-2)^3}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{2}{5}y^{5/2} - 2\cdot\frac{2}{3}\cdot y^{3/2}\right]_0^1 = \ldots = \frac{29}{60} \quad (\text{snad})$$

Pro obrácené pořadí integrace: $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$, kde

$\omega_1 = \{ [x,y] ; 0 \le x \le 1 , 0 \le y \le x^2 \}$, $\omega_2 = \{ [x,y] ; 1 \le x \le 2 , 0 \le y \le 2-x \}$;

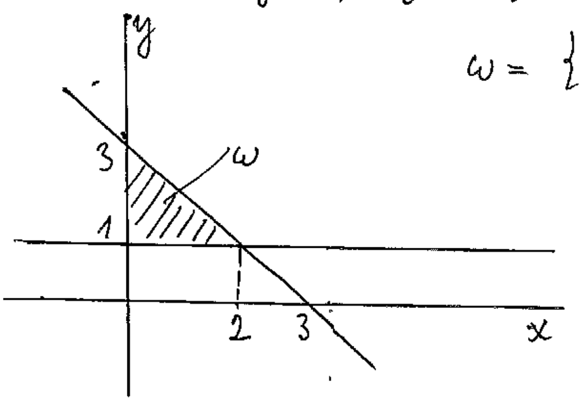
pak
$$V(\Omega) = \iint_{\omega} (2-x-y)\,dxdy = \iint_{\omega_1} (2-x-y)\,dxdy + \iint_{\omega_2} (2-x-y)\,dxdy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (2-x-y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (2-x-y)\,dy =$$
$$= \int_0^1 \left[(2-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} dx + \int_1^2 \left[(2-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x} dx =$$
$$= \int_0^1 \left((2-x)x^2 - \frac{x^4}{2} \right) dx + \int_1^2 \frac{(2-x)^2}{2}\, dx = \dots = \frac{29}{60}$$

5. Těleso Ω je ohraničené rovinami $x=0$, $y=1$, $x+y=3$, $z=0$ a plochou $z = xy$ (tj. grafem funkce $f(x,y) = xy$).

Opět, $V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz$; a zkusme nyní najít meze pro integraci pomocí Fubiniho věty:

(i) máme dvě podmínky pro proměnnou „z": $z=0$ a $z=xy$;

(ii) průmět tělesa do roviny $z=0$ je dán třemi rovinami $x=0$, $y=1$, $x+y=3$, které jsou kolmé na rovinu $z=0$, tj. v rovině $z=0$ bude integrační oblast ω ohraničená přímkami $x=0$, $y=1$ a $x+y=3$, tj. ω je trojúhelník, viz obr.



$\omega = \{ [x,y] ; 1 \le y \le 3-x , 0 \le x \le 2 \}$;

a v ω je $f(x,y) = xy > 0$, tj. $0 \le z \le xy$ pro $(x,y) \in \omega$.

Tedy:

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \int_0^2 dx \int_1^{3-x} dy \int_0^{xy} dz = \int_0^2 dx \int_1^{3-x} xy\,dy =$$

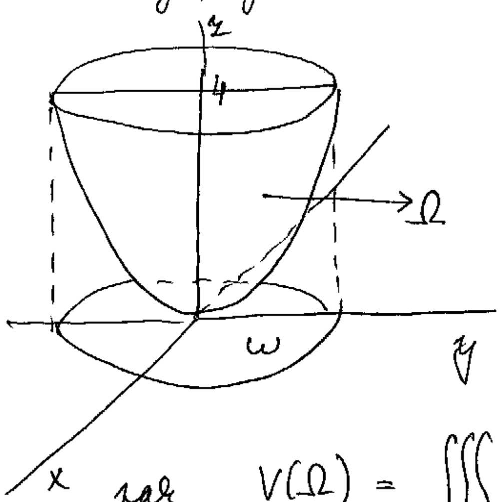
$$= \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^{3-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x(3-x)^2 - x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(4 - 16 + 16\right) = 2.$$

6. <u>Těleso Ω je ohraničené plochou $z = x^2+y^2$ a rovinou $z=4$.</u>

(užijte válcové souřadnice)

S touto oblastí Ω jsme se už setkali v příkladu 4b, můžeme tedy „rychle“:



$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz \quad , \text{ kde}$$

$x^2+y^2 \le z \le 4$, a $x^2+y^2 \le 4$ v rovině $z=0$ je integrační oblast ω,

máme ve válcových souřadnicích: $r^2 \le z \le 4$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;

pak

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega_{r,\varphi,z}} r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\,dr \int_{r^2}^4 dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(4-r^2)\,dr = 2\pi\left[\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \pi\left[4r^2 - \frac{r^4}{2}\right]_0^2 =$$

$$= \pi(16-8) = \underline{8\pi}$$

„Fyzikální“ aplikace:

1. Vypočítejte hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z=0$ a plochami $x^2+y^2=1$, $z=x^2+y^2+1$, je-li hustota ρ tělesa v bodě (x,y,z) přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od osy z.
2. Vypočítejte hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z=4$ a plochou $z=x^2+y^2$, je-li hustota ρ tělesa v bodě (x,y,z) rovna

   a) $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$; b) $\rho(x,y,z)=z$.

Víme, že „fyzikálně“ je hmotnost tělesa Ω, je-li ρ hustota v Ω,

$$m=\iiint_\Omega dm = \iiint_\Omega \rho\, dV \qquad (\text{„}dm=\rho\, dV\text{“})$$

tedy ve formulaci „matematické“ (pomocí kartézských souřadnic)

$$m=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx .$$

Příklad 1.

zde $\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2}$, $k>0$, neboť vzdálenost bodu $X=(x,y,z)$ od osy z je $d(X)=\sqrt{x^2+y^2}$ (= vzdálenosti bodu $(x,y,0)$ od počátku v rovině $z=0$);

Tedy,

$$m(\Omega)=k\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz \quad ;$$

A oblast Ω je zadána podmínkami:

(i) $0\le z\le x^2+y^2+1$

(ii) $x^2+y^2\le 1$ (plyne ze zadání – plocha $x^2+y^2=1$ je válcová plocha)

tedy oblast ω pro integraci dle x a y je kruh o středu v 0 a poloměru $R=1$. Tedy při výpočtu $m(\Omega)$ zvolíme substituci do válcových souřadnic.

Pak: $\quad 0 \le z \le r^2+1\,,\quad 0 < r \le 1,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$

tedy $\quad m(\Omega) = k \iiint\limits_{\Omega_{xyz}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = k \iiint\limits_{\Omega_{r,\varphi,z}} \underbrace{r}_{\rho} \cdot \underbrace{r}_{J(r,\varphi,z)}\,dr\,d\varphi\,dz =$

$$= k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\,dr \int_0^{r^2+1} dz = 2\pi k \int_0^1 r^2(r^2+1)\,dr =$$

$$= 2\pi k \left[\frac{r^5}{5} + \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{16}{15}\pi k \; .$$

Příklad 2. $\quad$ zde $\rho(x,y,z) = z$ a Ω je naše „známá" oblast (z výpočtu objemu tělesa - příklad 6).

Tedy můžeme vás zase rychleji: (užijeme válcové souřadnice)
měse pro Ω: $\; r^2 \le z \le 4,\; 0 < r \le 2,\; 0 \le \varphi \le 2\pi$)
a pak

$$m(\Omega) \overset{(*)}{=} \iiint\limits_{\Omega_{xyz}} z\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega_{r\varphi z}} z \cdot r\,dr\,d\varphi\,dz = (\text{užili Fubiniho věty})$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\,dr \int_{r^2}^4 z\,dz = 2\pi \int_0^2 r \left[\frac{z^2}{2}\right]_{r^2}^4 dr = \pi \int_0^2 (16r - r^5)\,dr =$$

$$= \pi \left[8r^2 - \frac{r^6}{6} \right]_0^2 = \pi \left(2^5 - \frac{2^5}{3} \right) = \frac{\pi \cdot 2^6}{3} = \underline{\frac{64}{3}\pi}$$

Ale možná je v integrálu (*) lépe integrovat v jiném pořadí:
(už jsme tak zkusili v příkladu I, 4b)

$$m(\Omega) = \int_0^4 z\,dz \iint\limits_{\omega(z)} dx\,dy = \int_0^4 z \cdot \pi z\,dz = \pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^4 = \underline{\frac{64}{3}\pi} \quad !$$

$\omega(z)$ je kruh o středu $[0,0,z]$ a poloměru $R = \sqrt{z}$

3*. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního válce vzhledem k jeho ose .
4*. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního tělesa, ohraničeného rovinou $z = 3$ a plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ vzhledem k ose z .

„Návod": Je-li dáno těleso Ω s hustotou $\varrho(x,y,z)$, a označíme-li $d(x,y,z)$ vzdálenost bodu $(x,y,z) \in \Omega$ od osy rotace, pak „fyzikálně" je vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti J „tělesa Ω :

$$J = \iiint_{\Omega} d^2 \varrho \, dV ,$$

pak „matematicky" (v kartézských souřadnicích)

$$J = \iiint_{\Omega} d^2(x,y,z) \cdot \varrho(x,y,z) \, dx\,dy\,dz .$$

A zde :

Příklad 3*.

Těleso Ω je válec - označme poloměr základny R, a výšku H, a válec umístěme tak, že osa válce bude osa z, a válec bude „stát" v rovině $z = 0$. Pak

$$\Omega_{xyz} = \{ [x,y,z] ; \; x^2+y^2 \leq R^2 , \; 0 \leq z \leq H \} .$$

Válec je homogenní, tj. $\varrho(x,y,z) = \varrho$ (konstanta kladná), a vzdálenost bodu $X = (x,y,z)$ válce od osy z (osy válce Ω) je $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Pak tedy $$J(\Omega) = \iiint_{\Omega} \varrho \cdot (x^2+y^2) \, dx\,dy\,dz = \varrho \iiint_{\Omega} (x^2+y^2) \, dx\,dy\,dz .$$

K výpočtu integrálu užijeme substituci do válcových souřadnic :

Pak

$$\Omega_{r,\varphi,z} = \{[r,\varphi,z]\,;\ 0<r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le z\le H\},\ \text{a}$$

$$J(\Omega) = \rho \iiint\limits_{\Omega_{r,\varphi,z}} r^2 \cdot \underbrace{r}_{J(r,\varphi,z)}\, dr\,d\varphi\,dz = \rho \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3\,dr =$$

$$= \rho \cdot 2\pi \cdot H \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \underline{\frac{\rho\pi H R^4}{2}}$$

(podrobněji výpočet integrálu :

$$\rho\int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \rho\int_0^H dz \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R d\varphi = \rho \int_0^H dz \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi =$$

$$= \rho\cdot\frac{R^4}{4}\int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho\cdot\frac{R^4}{4}\int_0^H 2\pi\,dz = \frac{\rho R^4 \pi}{2}\,[z]_0^H = \frac{\rho\pi H R^4}{2}\ )$$

Ale možná byste ve fyzice řešili (nebo jste už užili) jiné pořadí integrace :

$$J(\Omega) = \rho\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H r^3 dz = \rho\int_0^R r^2\cdot(2\pi R.H)\,dr = 2\pi\rho H\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R =$$

$$= \underline{\frac{\pi\rho H R^4}{2}}\ (\text{opět})$$

a zde se v integrálu „přes" $r\in\langle 0,R\rangle$ vlastně „sčítají" momenty setrvačnosti válcových vrstev o poloměru $r\in\langle 0,R\rangle$ a „tloušťce" dr, a výšce H, vzdálenost bodů v těchto „vrstvách" od osy z je stále rovna $\underline{r}$ (tak se často řeší podobné úlohy ve fyzice vlastně užitím integrálu funkce jedné proměnné – dva zbývající integrály v trojném integrálu při užití Fubiniho věty se tak vlastně počítají „zpaměti").

Příklad 4*.

Máme určit moment setrvačnosti homogenního tělesa Ω, které je ohraničené rovinou $z=3$ a plochou $z=\sqrt{x^2+y^2}$, vzhledem k ose z.

Ω je kužel ($z=\sqrt{x^2+y^2}$ je rotační kuželová plocha). Tedy, opět

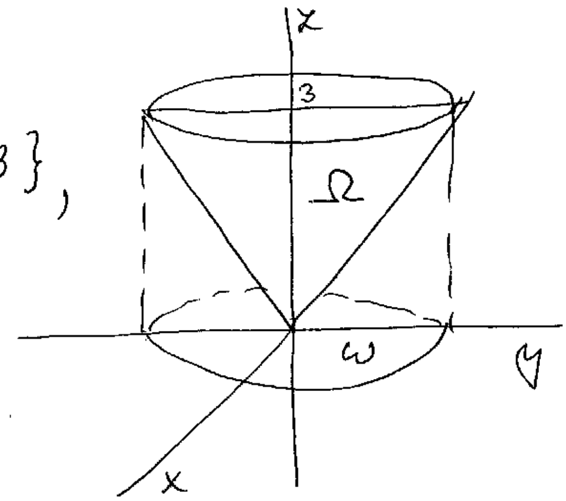
$$J(\Omega)=\iiint_{\Omega}\rho\cdot d^2(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{\Omega}\rho(x^2+y^2)\cdot dx\,dy\,dz .$$

a integrační oblast Ω:

$$\Omega_{xyz}=\{[x,y,z];\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3;\ \sqrt{x^2+y^2}\le 3\},$$

tedy v souřadnicích válcových:

$$\Omega_{r,\varphi,z}=\{[r,\varphi,z];\ r\le z\le 3,\ \varphi\in\langle 0,2\pi),\ 0<r\le 3\}$$



Pak $$J(\Omega)=\iiint_{\Omega_{r,\varphi,z}}\rho\cdot r^2\cdot \underbrace{r}_{J(r,\varphi,z)}\,dr\,d\varphi\,dz=$$

$$=\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3 r^3dr\int_r^3 dz=\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3 r^3(3-r)\,dr=2\pi\rho\left[\frac{3r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\right]_0^3=$$

$$=2\pi\rho\,3^5\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\underline{\frac{3^5\pi\rho}{10}}$$

a jiné pořadí integrace: $0\le z\le 3$, a pro pevné z je $\omega(z)$ kruh o středu $[0,0,z]$ a poloměru z:

$$J(\Omega)=\iiint_{\Omega_{r,\varphi,z}}\rho r^2\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz=\rho\int_0^3 dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^z r^3dr=2\pi\rho\int_0^3\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^z dz=\frac{2\pi\rho}{4}\int_0^3 z^4dz=$$

$$=\frac{\pi\rho}{2}\left[\frac{z^5}{5}\right]_0^3=\frac{3^5\pi\rho}{10}\quad(\text{cbd}).$$